3. domácí „test" z Matematické analýzy I – diferenciální počet.

---

1. a) Vypočítejte limitu ($n \in N$, $a \in R - \{0\}$):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2} .$$

b) Vypočítejte limitu ($n \in N$)

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1-arctg\frac{3}{n}\right).$$

---

2. a) Napište definici spojitosti funkce v bodě $a \in R$.
   b) Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f , která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

(i) $$f(x) = arctg\frac{1}{x^2} ,$$

(ii) $$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^3} .$$

---

3. a) i) Napište co znamená (dle definice), že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in R$.
   ii) Definujte derivaci $f'(x_0)$ funkce f v bodě $x_0 \in R$.
   b) Je dána funkce f předpisem : $f(x) = x^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ *pro* $x \neq 0,\quad f(0) = 0$

   Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá.
   c) Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in R$. Ukažte, že také první derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

   (Návod pro b) a c) : pro výpočet limity použijte větu limitě sevřené funkce .)

---

4. Funkce f je definována :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \quad pro \quad |x| < 1, \quad f(x) = 0 \quad pro \quad |x| \geq 1 .$$

Ukažte, že funkce f i její derivace f' jsou funkce spojité v R .

---

5. Funkce f je definována předpisem

$$f(x) = arctg^2\left(\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}\right) .$$

Najděte její definiční obor D_f. Dále zjistěte, pro která $x \in D_f$ existuje derivace $f'(x)$, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

6. Je dána funkce $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$.

Vyšetřete její průběh:
Najděte její definiční obor,vyšetřete spojitost funkce f a limity v krajních bodech .
Vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotonii , lokální a globální extrémy funkce f.
Vypočítejte druhou derivaci. Najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.
Pokud má funkce f inflexní body , určete je.
Načrtněte graf funkce.

---

7. Je dána funkce $f(x) = x\,e^{-|x-1|}$.

Vyšetřete její průběh (viz př.6) .

---

8. Nalezněte lokální a globální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{|2x-1|}{(x-1)^2}$.

Načrtněte graf funkce f .

---

9. Nalezněte lokální a globální extrémy funkce $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.

Načrtněte graf funkce f .

---

10. Je dána funkce $f(x) = \ln\left(|x| - x^2\right)$.

a) Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce f .
b) Načrtněte graf funkce f .

---

11. Je dána funkce $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce f .
b) Načrtněte graf funkce f .

---

12. Vypočítejte limity:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 . \arcsin\frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x\to 0+} x^2\, e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\ln x}}, \quad \lim_{x\to 0+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0}\left(e^x - 2x\right)^{\frac{1}{2x}} .$$